MINISTERUL APĂRĂRII NAȚIONALE
ACADEMIA NAVALĂ “MIRCEA CEL BĂTRÂN”
FACULTATEA DE INGINERIE MARINĂ
SESIUNEA IULIE 2016

PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. a) Să se determine mulțimea $A=\{x\in\mathbb{N} \mid |x-1|\le 2\}$.

   b) Să se determine mulțimea $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x-1|\le 2\}$.

   c) Să se determine mulțimea $C=A\setminus B$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4^x-m\left(2^{x+1}+m\right)-1,\ m\in\mathbb{R}$.

   a) Pentru $m=0$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

   b) Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R},\ f(x)\ge -2m^2-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

   c) Dacă x_1 și x_2 sunt două rădăcini ale ecuației $f(x)=-5$, să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2=2$.

3. Fie sistemul

$$\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases},\ m\in\mathbb{R}.$$

   a) Să se arate că $x=0, y=3$ și $z=1$ este soluție a sistemului pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

   b) Să se determine valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul admite soluție unică.

   c) Pentru $m\ne 3$ să se rezolve sistemul.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} a\sin x+1, & x\le 0 \\ \cos x, & x>0. \end{cases}$

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția să fie derivabilă în $x=0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=\frac{\pi}{3}$.

c) Să se calculeze $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5. a) Calculați $F(x)=\int \frac{2x+5}{x^2+5x+7}dx$.

b) Calculați $G(x)=\int \sin^2 x\,dx$.

c) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+4}}dx=(ax+b)\sqrt{x^2+4}+c\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este de 3 ore.

PREȘEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE,
Cdor
Conf.univ.dr.ing.
Mihail PRICOP

PREȘEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.I.M.,
Cpt.Cdor
Conf.univ.dr.ing.
Paul BURLACU

BAREM

1. Oficiu 1p

a) $-2 \le x-1 \le 2$ 1p

$-1 \le x \le 3$ 1p

$A=\{0,1,2,3\}$ 1p

b) $-2 \le x-1 \le 2$ 1p

$-1 \le x \le 3$ 1p

$B=\{-1,0,1,2,3\}$ 1p

c) $C=A \setminus B=\phi$ 3p

2. Oficiu 1p

a) $\begin{cases} m=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow 4^x=1$ 1.5p

$x=0$ 1.5p

b) $f(x) \ge -2m^2-1 \Leftrightarrow 2^{2x}-2m\cdot 2^x+m^2 \ge 0$ 1.5p

$\left(2^x-m\right)^2 \ge 0$ Adevărat, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{R}$ 1.5p

c) $f(x)=-5 \Leftrightarrow 2^{2x}-2m\cdot 2^x-m^2+4=0$ 0.5p

$2^{x_1+x_2}=-m^2+4$ 1p

$4=-m^2+4$ 0.5p

$m=0$ 0.5p

$m=0, m \in \mathbb{R}^* \Rightarrow m \in \phi$ 0.5p

3. Oficiu 1p

a) Prin înlocuire în relațiile sistemului, obținem

$0-2\cdot 3+3\cdot 1=0-6+3=-3$ 1p

$2\cdot 0+3+1=0+3+1=4$ 1p

$m\cdot 0-3+4\cdot 1=0-3+4=1$ 1p

Deoarece toate relațiile sunt verificate, rezultă că $x=0$, $y=3$ și $z=1$ este soluție a sistemului pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

b) Sistemul admite soluție unică dacă și numai dacă $\det(A) \ne 0$ 1p

$\det(A)=-5m+15$ 1p

$m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ 1p

c) Aplicând regula lui Cramer, obținem:

$x=\frac{\Delta_x}{\det(A)}=\frac{0}{-5m+15}=0$ 1p

$y=\frac{\Delta_y}{\det(A)}=\frac{-15m+45}{-5m+15}=3$ 1p

$z=\frac{\Delta_z}{\det(A)}=\frac{-5m+15}{-5m+15}=1$ 1p

4. Oficiu 1p

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$ continua in $x=0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ 1p

$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{a\cdot \sin x}{x} = a,\ f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ 1p

$f_s'(0) = f_d'(0) \Rightarrow a = 0$ 1p

b) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 1p

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 1p

$y - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 1p

c) $f'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -\sin x, & x > 0 \end{cases}$ 1p

$f''(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -\cos x, & x > 0 \end{cases}$ 1p

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1p

5. Oficiu 1p

a) $x^2 + 5x + 7 = t \Rightarrow dt = (2x+5)dx$ 1p

$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$ 1p

$F(x) = \ln\left|x^2 + 5x + 7\right| + C = \ln\left(x^2 + 5x + 7\right) + C$ 1p

b) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 1p

$G(x) = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ 2p

c) Derivând egalitatea din enunț, rezulta

$\frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x^2+4}} = a\sqrt{x^2+4} + \frac{(ax+b)x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{c}{\sqrt{x^2+4}}$ 1p

$x^2 + 3x = 2ax^2 + bx + 4a + c \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 3, c = -2$ 2p